



گزینه ۴

۱

فرض کنید این ۶ نفر را با abcdef نشان دهیم. برای این کار ابتدا ۲ نفر از ۶ نفر را انتخاب می‌کنیم و در گروه ۱ قرار می‌دهیم، سپس ۲ نفر از ۴ نفر باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم و در گروه ۲ قرار می‌دهیم و سپس ۲ نفر باقی‌مانده را نیز در گروه ۳ قرار می‌دهیم. داریم:

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{3!} = \frac{\frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times 1}{3!} = \frac{90}{6} = 15$$

گزینه ۳

۲

حروف صدادار : a, e, i

حروف بی‌صدا : s, m, b, t, d

حالت ۱: دقیقاً دو حرف صدادار موجود باشد و دو حرف بی‌صدا:

$$\binom{3}{2} \times \binom{5}{2} \times 4! = 3 \times 10 \times 24 = 720$$

حالت ۲: دقیقاً سه حرف صدادار موجود باشد و یک حرف بی‌صدا:

$$\binom{3}{3} \times \binom{5}{1} \times 4! = 1 \times 5 \times 24 = 120$$

دقت کنیم امکان اینکه همهٔ حرف‌های این کلمهٔ ۴ حرفی صدادار باشد، وجود ندارد. بنابراین تعداد کلمات ۴ حرفی برابر با $720 + 120 = 840$ حالت است.

گزینه ۴

۳

اگر دانش‌آموزان را با حرف D و معلم‌ها را با حرف M نمایش دهیم، سه آرایش زیر را برای نشستن این افراد در کنار هم می‌توان در نظر گرفت به طوری که هر دانش‌آموز با معلمی مجاور باشد:

DMDMD , DMDDM , MDDMD

حال سه دانش‌آموز در جایگاه‌های مشخص‌شده با حرف D در هریک از آرایش‌ها، به ۳! طریق و دو معلم در جایگاه‌های مشخص‌شده با حرف M در هریک از آرایش‌ها، به ۲! طریق جایگشت دارند. بنابراین تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

$$3 \times 3! \times 2! = 36$$

طبق قاعده پاسکال $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ داریم:

$$\binom{24}{10} + \binom{24}{9} = \binom{24+1}{10} = \binom{25}{10} = \binom{25}{25-10} = \binom{25}{15}$$

تشکیل یک گروه علمی ۴ نفره با شرایط مسئله به سه حالت زیر تقسیم می‌شود:

$$\begin{aligned} (1) \text{ انتخاب } 2 \text{ نفر از } 4 \text{ معلم ریاضی و } 2 \text{ نفر از } 5 \text{ معلم غیر ریاضی: } 60 &= \binom{4}{2} \binom{5}{2} \\ (2) \text{ انتخاب } 3 \text{ نفر از } 4 \text{ معلم ریاضی و } 1 \text{ نفر از } 5 \text{ معلم غیر ریاضی: } 20 &= \binom{4}{3} \binom{5}{1} \\ (3) \text{ انتخاب } 4 \text{ نفر از } 4 \text{ معلم ریاضی و صفر نفر از } 5 \text{ معلم غیر ریاضی: } 1 &= \binom{4}{4} \binom{5}{0} \end{aligned}$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} \binom{5}{0} = 81$$

در حل این مسئله، تکرار ارقام مجاز است. تنها نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم آن است که محدودیت رقم‌گذاری در خانه هزارگان است و اگر هزارگان عدد ۲ باشد، خانه صدگان نیز دارای محدودیت خواهد بود. داریم:

حالت اول: رقم هزارگان ۳، ۴ یا ۵ باشد:

$$\underbrace{3}_{\{3,4,5\}} \times \underline{6} \times \underline{6} \times \underline{6} = 3 \times 216 = 648$$

حالت دوم: رقم هزارگان ۲ باشد:

$$\underbrace{1}_{\{2\}} \times \underbrace{3}_{\{3,4,5\}} \times \underline{6} \times \underline{6} = 108$$

دقت کنیم در حالت دوم عدد ۲۳۰۰ نیز ساخته می‌شود. پس از تعداد حالت‌های به‌دست‌آمده، ۱ واحد کم می‌کنیم. داریم:

$$\text{جواب حالت دوم} = 108 - 1 = 107$$

$$755 = 648 + 107 = \text{تعداد اعداد } 4 \text{ رقمی بزرگ‌تر از } 2300$$

سه حالت برای قرار گرفتن ارقام زوج در یکان عدد داریم:
حالت اول: عدد ۲ در یکان و فقط ارقام ۱، ۶ و ۴ می‌توانند در دهگان یا صدگان نوشته شوند:

$$\frac{3}{\text{دو}} \times \frac{2}{\text{دو}} \times \frac{1}{\text{دو}} = 6$$

حالت دوم: عدد ۴ در یکان و فقط یکی از ارقام ۲، ۳، ۵ و ۷ در دهگان یا صدگان نوشته می‌شوند ولی ارقام ۱ و ۶ می‌توانند در دهگان یا صدگان نوشته شوند:

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\text{چهار}} \times \frac{1}{\text{چهار}} = 16$$

باهم جابه‌جا می‌شوند

حالت سوم: عدد ۶ در یکان و مانند حالت قبل:

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\text{شش}} \times \frac{1}{\text{شش}} = 16$$

باهم جابه‌جا می‌شوند

پس در مجموع $6 + 16 + 16 = 38$ حالت وجود دارد.

AA TT B S R C

ابتدا حروف T, T, B, S, R, C را به $\frac{6!}{2!}$ طریق کنار هم می‌چینیم.



$$\frac{6!}{2!} \rightarrow \text{تعداد حالت‌ها}$$

حال در هفت جایگاه رنگی ایجاد شده، دو حرف A را به $\binom{7}{2}$ طریق قرار می‌دهیم. در آخر باتوجه به اصل ضرب، داریم:

$$\text{روش اول: } \frac{6!}{2!} \times \binom{7}{2} = \frac{6!}{2} \times 7 \times 3 = \frac{3}{2} \times 7!$$

$$\text{روش دوم: } \frac{6!}{2!} \times \frac{7 \times 6}{2} = \frac{3}{2} \times 7!$$

ابتدا از بین ۶ گروه فوتبال ۵ گروه را انتخاب می‌کنیم، سپس از هرکدام یک نفر را انتخاب می‌کنیم.

$$P = \binom{6}{5} \binom{6}{1} \binom{6}{1} \binom{6}{1} \binom{6}{1} \binom{6}{1} = 6^6$$

برای حل این تست از قاعدهٔ متمم استفاده می‌کنیم.

تعداد کل حالاتی که ۶ نفر دور یک میز بنشینند: $5!$

تعداد حالاتی که پدر و مادر و بچه‌ها دور میز بنشینند به‌طوری‌که پدر و مادر در کنار هم باشند: $4! \times 2!$
در نتیجه:

$$5! - 4! \times 2! = 5 \times 4! - 4! \times 2! = 4!(5 - 2) = 3 \times 4!$$

اگر حروف بی‌صدا را با b و حروف صدادار را با s نمایش دهیم؛ سه آرایش زیر را برای این جایگشت‌ها می‌توان در نظر گرفت به‌طوری‌که هر حرف بی‌صدا با حرفی صدادار مجاور باشد:

$bsbsb$, $bsbbs$, $sbbsb$

حال سه حرف بی‌صدا در جایگاه‌های مشخص‌شده با حرف b در هر یک از این آرایش‌ها به $3!$ طریق و دو حرف صدادار در جایگاه‌های مشخص‌شده با حرف s در هر یک از این آرایش‌ها به $2!$ طریق جایگشت دارند، پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با:

$$3 \times 3! \times 2! = 36$$

می‌خواهیم حداکثر ۲ آلمانی داشته باشیم، پس تعداد آلمانی‌ها، صفر یا ۱ یا ۲ نفر است و بقیهٔ ۵ نفر از بین ۷ برزیلی و ایتالیایی انتخاب می‌شوند (۴ برزیلی و ۳ ایتالیایی). داریم:

$$\binom{5}{0} \binom{7}{5} + \binom{5}{1} \binom{7}{4} + \binom{5}{2} \binom{7}{3} = 1 \times 21 + 5 \times 35 + 10 \times 35 \\ = 21 + 175 + 350 = 546$$

برای آنکه حاصل ضرب ارقام این اعداد بر ۳ بخش‌پذیر نباشد؛ لازم است که هیچ‌یک از ارقام این اعداد مضرب ۳ نباشند؛ یعنی ارقام ۰، ۳، ۶ و ۹ نباید در ساختار ارقام این اعداد دیده شوند. لذا ما به دنبال اعدادی هستیم که با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ ساخته می‌شوند و ارقام متمایزی دارند که تعداد این اعداد برابر است با:

$$\frac{6}{\text{هزارگان}} \times \frac{5}{\text{صدگان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{یکان}} = 360$$

هدف ما انتخاب ۲ مرد غیرهم‌رشته‌ای و ۲ زن غیرهم‌رشته‌ای است. به همین منظور برای انتخاب ۲ استاد مذکور، ۲ رشته از ۳ رشته را انتخاب کرده (به $\binom{3}{2}$ طریق) و سپس یک استاد از سه استاد رشته اول (به $\binom{3}{1}$ طریق) و یک استاد از سه استاد رشته دوم (به $\binom{3}{1}$ طریق) انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد حالات انتخاب ۲ استاد مرد غیرهم‌رشته‌ای برابر است با:

$$\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 27$$

به همین ترتیب تعداد حالات انتخاب ۲ استاد زن غیرهم‌رشته‌ای نیز برابر با $\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} = 27$ خواهد بود. لذا تعداد طرق انتخاب کمیته ۴ نفره برابر است با:

$$\left(\binom{3}{2} \binom{3}{1} \binom{3}{1} \right)^2 = 27^2 = 729$$

نکته: اگر بخواهیم اشیایی را جایگشت دهیم به‌طوری‌که k شیء هیچ دوبه‌دویشان کنار هم نباشند، باید ابتدا مابقی اشیاء را جایگشت دهیم و سپس این k شیء را در فضای یکی بیشتر از تعداد اشیایی که چیدیم، جایگشت دهیم. باتوجه‌به نکته بالا برای آنکه هیچ دو والیبالیست کنار هم نباشند، باید ابتدا ۶ فوتبالیست را جایگشت داده و سپس ۳ والیبالیست را در ۷ فضای خالی ایجادشده، جایگشت دهیم. برای این منظور از اصل ضرب کمک گرفته یا ۳ جای خالی را انتخاب کرده (از ۷ جا) و آن ۳ نفر را در آن‌ها جایگشت می‌دهیم. داریم:

$$_ F _ F _ F _ F _ F _ F _$$

$$\underbrace{6!}_{\text{جایگشت فوتبالیست‌ها}} \times \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{\text{جایگشت والیبالیست‌ها}} \quad \text{یا} \quad 6! \times \binom{7}{3} \times 3! = 7! \times 3.$$

تعداد اعداد پنج‌رقمی (بدون حروف) سمت چپ 9^5 و حروف ۶ تا و اعداد دورقمی سمت راست ۹ تا است. پس تعداد کل برابر است با:

$$9^5 \times 9 \times 6 = 6 \times 9^6$$

تعداد حروف نقطه‌دار زبان فارسی ۱۷ و تعداد حروف صدادار زبان انگلیسی ۵ است. چون حروف کنار هم نباید از یک زبان باشد، دو حالت وجود دارد:

۱۷ ۵ ۱۷ : شروع با حرف فارسی

۵ ۱۷ ۵ : شروع با حرف انگلیسی

پس جواب نهایی برابر است با:

$$17 \times 5 \times 17 + 5 \times 17 \times 5 = 17 \times 5 (17 + 5) = 17 \times 5 \times 22 = 17 \times 110 = 1870$$

دقت کنید! در ساختن رمز، تکرار مجاز است!

روش اول:

برای انتخاب ۳ مهره با رنگ متفاوت، ۲ حالت داریم:

۵ مهره قرمز

۴ مهره سفید

حالت اول: ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد:

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$$

حالت دوم: ۲ مهره سفید و ۱ مهره قرمز باشد:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 30$$

حال باتوجه به اصل جمع، داریم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = 40 + 30 = 70$$

روش دوم: از روش کل حالت‌ها منهای حالت‌های نامطلوب نیز می‌توان به جواب درست رسید (متمم). داریم:

$$\text{حالت‌های نامطلوب} - \text{کل حالت‌ها} = \binom{9}{3} - \left(\binom{5}{3} + \binom{4}{3} \right)$$

$\downarrow$
 ۳ مهره
 قرمز

$\downarrow$
 ۳ مهره
 سفید

$$= 84 - \overbrace{(10 + 4)}^{14} = 70$$

برای آنکه دقیقاً ۲ تا عضو از بین اعضای ۱، ۲ و ۳ در زیرمجموعه باشد، سه حالت برای عضوهای ۱، ۲ و ۳ رخ می‌دهد (۱ و ۲ یا ۱ و ۳ یا ۲ و ۳ یا ۱ و ۲ و ۳ در زیرمجموعه ما هستند). از طرفی دیگر اعضای ۴، ۵ و ۶ هم هرکدام ۲ حالت دارند. می‌توانند در زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس داریم:

$$\frac{۲}{۳, ۲, ۱} \times \frac{۲}{۴} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۶} = ۲۴$$

برای به دست آوردن تعداد اعداد مطلوب، کافی است تعداد کل ۵ رقمی‌ها با شرایط فوق را به دست آورده و آن‌هایی که با صفر آغاز می‌شوند را از آن کم کنیم:

$$\underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{۳ \text{ رقم زوج } ۲ \text{ رقم فرد}}$$

اعداد موردنظر ما ۳ رقم زوج و ۲ رقم فرد دارند. سه جایگاه از پنج جایگاه را برای ارقام زوج انتخاب می‌کنیم (به $\binom{۵}{۳}$ طریق) و دو جایگاه باقی‌مانده به‌طور یکتا فرد خواهند بود. در سه جایگاه انتخاب‌شده برای ارقام زوج می‌توان هریک از ارقام صفر، ۲ و ۴ و در دو جایگاه باقی‌مانده می‌توان ارقام ۱ و ۳ را انتخاب کرد. بنابراین تعداد کل پنج‌رقمی‌ها برابر است با:

$$\binom{۵}{۳} \times ۳^۳ \times ۲^۲ = ۱۰۸۰$$

تعداد پنج‌رقمی‌هایی که با رقم صفر آغاز می‌شوند را می‌شماریم: چپ‌ترین جایگاه به ۱ انتخاب با صفر پر می‌شود.

$$\underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{۲ \text{ رقم زوج } ۲ \text{ رقم فرد}}$$

در چهار جایگاه باقی‌مانده ۲ رقم زوج و ۲ رقم فرد لازم داریم. دو جایگاه از چهار جایگاه را برای ارقام زوج انتخاب می‌کنیم (به $\binom{۴}{۲}$ طریق) و دو جایگاه دیگر به صورت یکتا فرد خواهند بود. در دو جایگاه مذکور، می‌توان هریک از ارقام صفر، ۲ و ۴ و در دو جایگاه دیگر می‌توان ارقام ۱ و ۳ را انتخاب کرد. بنابراین تعداد این پنج‌رقمی‌ها برابر است با: $\binom{۴}{۲} \times ۳^۲ \times ۲^۲ = ۲۱۶$. حال کافی است این دو عدد را از هم کم کنیم:

$$۱۰۸۰ - ۲۱۶ = ۸۶۴$$

ابتدا ۴ مهره زرد را به ۴! حالت کنار هم قرار می‌دهیم پس در سه مکان موجود در بین مهره‌های زرد، مهره‌های آبی را به ۳! طریق می‌چینیم، بنابراین: $۴! \times ۳! = ۱۴۴$

ابتدا سه رقم از بین ارقام داده شده انتخاب می‌کنیم $\binom{5}{3}$. اما هر سه عدد که انتخاب شود تنها یک حالت رخ می‌دهد که "صدگان < دهگان < یکان" باشد. مثلاً با انتخاب ۷، ۵ و ۳ تنها یک حالت ۷۵۳ وجود دارد. بنابراین تعداد کل اعداد با این شرط برابر است با:

$$\binom{5}{3} \times 1 = 10$$

اگر بخواهیم یک کلمه ۴ حرفی بنویسیم، دو حالت رخ می‌دهد. حالت اول: حرف تکراری در کلمه ۴ حرفی وجود ندارد. بنابراین باید با جابجایی حروف e, i, l, n, o، یک کلمه ۴ حرفی بنویسیم (بدون تکرار حروف). داریم:

$$\frac{5}{\text{حرف اول}} \times \frac{4}{\text{حرف دوم}} \times \frac{3}{\text{حرف سوم}} \times \frac{2}{\text{حرف چهارم}} = 120$$

حالت دوم: دو حرف تکراری n در کلمه وجود دارد. بنابراین باید ۲ حرف از بین حروف دیگر e, i, l, o انتخاب کرده و به همراه ۲ حرف n، یک کلمه ۴ حرفی بنویسیم. داریم:

$$\underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\downarrow \\ \text{انتخاب} \\ \text{۲ حرف دیگر}}} \times \underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\substack{\downarrow \\ \text{جایگشت} \\ \text{ها n}}} = 6 \times 12 = 72$$

بنابراین تعداد کلمات ۴ حرفی که می‌توانیم با حروف کلمه online بنویسیم برابر است با:

$$120 + 72 = 192$$

راه حل اول: تعداد حالت‌های این کار جایگشت سه شیء از میان پنج شیء متمایز است، یعنی:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 60$$

راه حل دوم: می‌توان از اصل ضرب استفاده کرد:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

در بین اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰، پنج عدد فرد و پنج عدد زوج وجود دارد. بنابراین یک زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه اعداد $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ نهایتاً می‌تواند ۵ عضو فرد داشته باشد. لذا زیرمجموعه‌های ۵ عضوی که حداقل سه عدد فرد دارند را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:

- ۱- سه عضو فرد و دو عضو زوج (انتخاب ۳ عدد از ۵ عدد فرد و ۲ عدد از ۵ عدد زوج): $\binom{5}{3} \binom{5}{2}$
- ۲- چهار عضو فرد و یک عضو زوج (انتخاب ۴ عدد از ۵ عدد فرد و ۱ عدد از ۵ عدد زوج): $\binom{5}{4} \binom{5}{1}$
- ۳- پنج عضو فرد و صفر عضو زوج (انتخاب ۵ عدد از ۵ عدد فرد و ۰ عدد از ۵ عدد زوج): $\binom{5}{5} \binom{5}{0}$

پس پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{5}{3} \binom{5}{2} + \binom{5}{4} \binom{5}{1} + \binom{5}{5} \binom{5}{0} = 126$$

ابتدا ۲ زوج از ۶ زوج انتخاب می‌کنیم (به $\binom{6}{2}$ حالت). با انتخاب این ۲ زوج، ۴ نفر از ۷ نفر مشخص می‌شوند و ۳ نفر دیگر کم داریم. اما در بین این ۳ نفر نباید زوج دیگری وجود داشته باشد. به همین جهت ۳ زوج از ۴ زوج باقی‌مانده را انتخاب کرده (به $\binom{4}{3}$ طریق) و از هرکدام از این ۳ زوج، یک نفر را برمی‌گزینیم. (یا زن یا شوهر) بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{3} \times 2^3 = 480$$

چهار جایگاه زیر را در نظر می‌گیریم. جایگاه اول به ۲ انتخاب (e, i) و جایگاه آخر به ۱ انتخاب (n) پر می‌شوند.

$\overline{\text{e,i}} \quad \overline{\text{---}} \quad \overline{\text{n}}$

جایگاه دوم به دلیل حذف حرف n و یکی از دو حرف e و i، ۵ انتخاب خواهد داشت و جایگاه سوم نیز به همین ترتیب ۴ انتخاب دارد. بنابراین تعداد کل این کلمات برابر است با:

$$2 \times 5 \times 4 \times 1 = 40$$

چندضلعی‌هایی که می‌توان با هفت نقطه ساخت از مثلث شروع می‌شود (سه ضلعی) و به هفت ضلعی ختم می‌شود؛ پس:

$$\text{تعداد چندضلعی‌ها با هفت نقطه} = \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$$

$$\text{از آن جایی که } 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \text{، بنابراین تعداد چندضلعی‌ها برابر است با:}$$

$$2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1} - \binom{7}{2} = 128 - 1 - 7 - \frac{7 \times 6}{2} = 99$$

$$P(n, 4) = 4 \circ P(n-1, 2) \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 4 \circ \times \frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

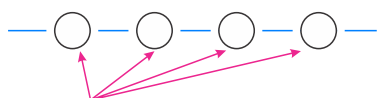
$$\Rightarrow \frac{n(n-1)!}{(n-4)!} = 4 \circ \times \frac{(n-1)!}{(n-3)(n-4)!} \Rightarrow n = \frac{4 \circ}{n-3}$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n - 4 \circ = 0 \Rightarrow (n+5)(n-8) = 0$$

$$\Rightarrow n = -5, n = 8$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \binom{n}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

روش اول: ابتدا حروف $\{Y, T, E, M\}$ را به $4!$ حالت جایگشت می‌دهیم. با انجام این کار بین این ۴ حرف و دو طرف آن، ۵ فضای خالی ایجاد می‌شود که از بین آن‌ها ۳ فضای خالی را انتخاب کرده و به یک حالت S را می‌چینیم. داریم:



جایگشت $\{Y, T, E, M\}$

$$\Rightarrow 4! \times \binom{5}{3} \times 1 = 24 \times 10 = 240$$

روش دوم:

$$4! \times \underbrace{5 \times 4 \times 3}_{\substack{3! \\ \downarrow \\ \text{جایگشت} \\ \text{های تکراری } S}} = 24 \times 10 = 240$$